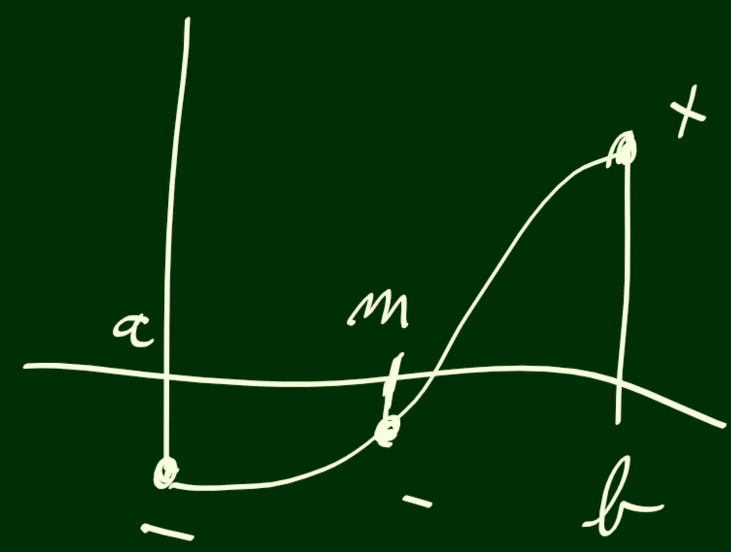
Nelineární algebraické rovnice: $e^{x^3} - \sin x = 0$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, spojitá. Hledám $f(x_*)=0$.

Př: $x^5 - x + 1 = 0$

Metoda bisekce (půlení intervalu)



V: f spojitá $f(a)\cdot f(b) \le 0 \Rightarrow \exists x_* \in [a,b]$

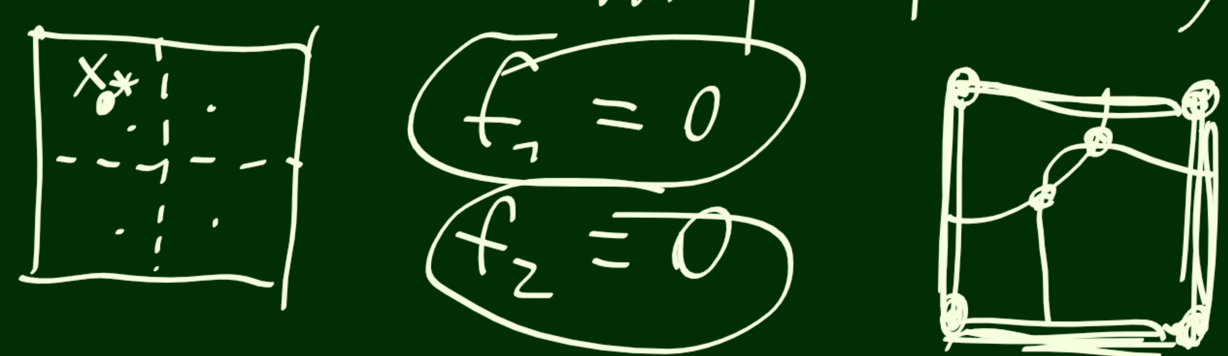
Alg.: while $|b-a| > Tol$

$m = \frac{a+b}{2}$

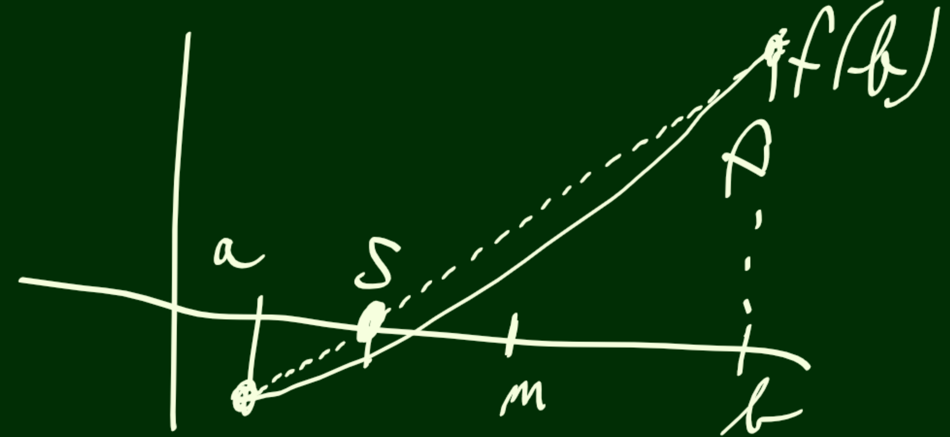
if $f(a)\cdot f(m) < 0$: $b = m$,

else $a = m$

- Generuje $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, $I_0=[a,b]$, $I_{n+1}\subset I_n$, $|I_{n+1}| = |I_n|/2 \Rightarrow |I_n| = \frac{|b-a|}{2^n}$
- Vždy $x_*\in I_n \ \forall n$.
- Kolik iterací $\frac{|b-a|}{2^n}\le Tol \Rightarrow n \ge \log_2 \frac{|b-a|}{Tol}$.
- Vždy funguje, ale pomalé.
- nejde pro sudé kořeny $x^2=0$. (x_* je kořen liché násobnosti pro $f'=0$)
- $\mathbb{R}^n$?: $n=100$, testovat 2^{100} podintervalů $\approx 1{,}27\cdot 10^{30}$ krychlí.



Regula falsi (false position) - jako bisekce



$$s = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$ místo m v bisekci.

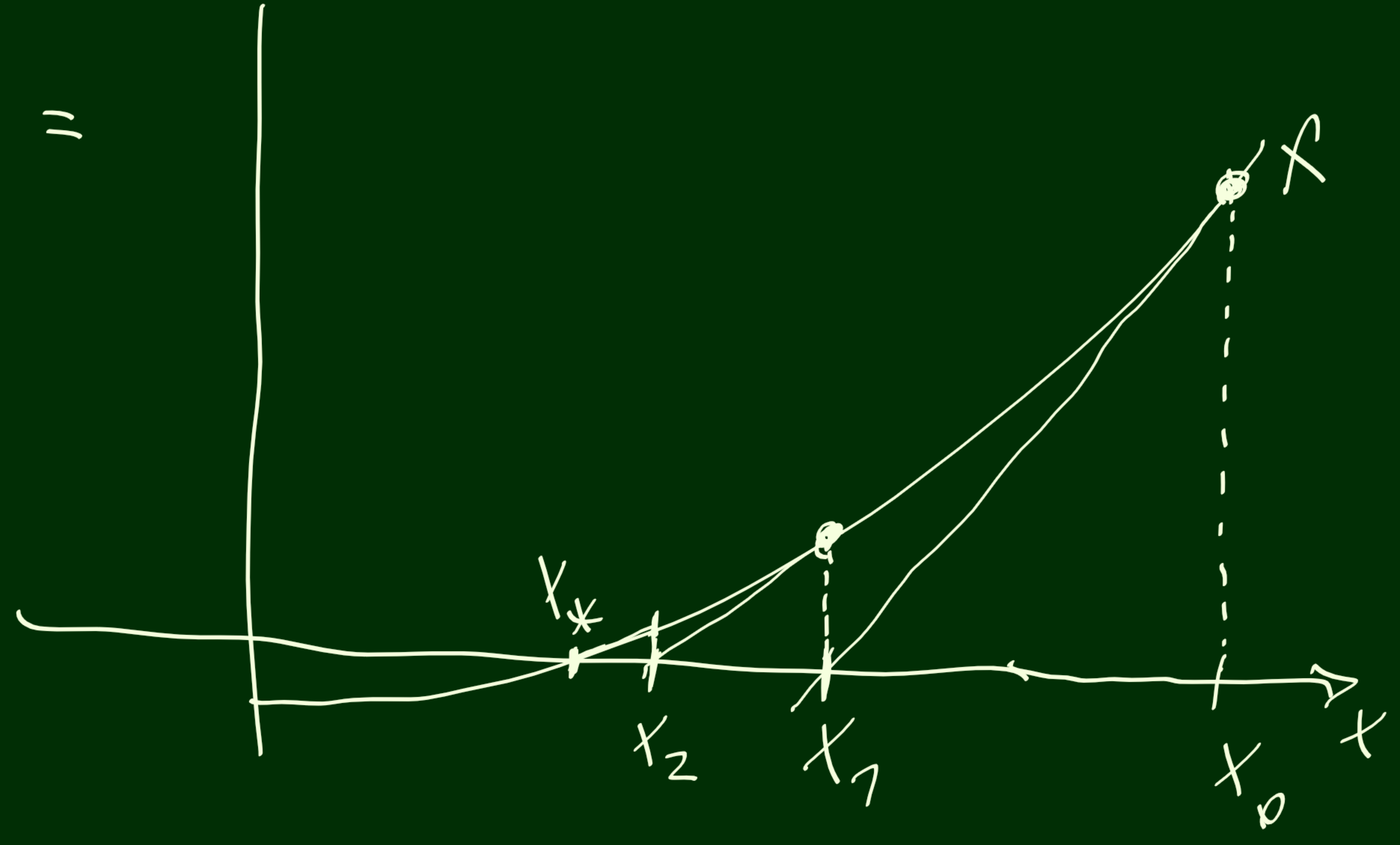
- obecně rychlejší než bisekce, někdy pomalejší
- Vždy funguje

Newtonova metoda: x_0 = aproximace x_*

$$0 \overset{\approx}{=} f(x_*) \overset{Taylor}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x_* - x_0) + \cancel{R} \Rightarrow x_* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =: x_1$$

Def: Newtonova metoda: dáno $x_0 \approx x_*$: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Při: $\sqrt{A}$: $x^2 - A = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} =$
$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$



<u>Rychlost konvergence</u>: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_n \to x_*$, $e_n = x_n - x_*$ - chyba v n-té iteraci.
$e_n \to 0$.

<u>Def</u>: Nechť $\exists p > 0, C > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$, řekneme, že $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ má <u>řád konvergence p</u>. <u>Metoda je řádu p</u>, jestliže ∀ posloupnost získanou touto metodou má řád alespoň p a aspoň jedna posloupnost má řád přesně p.

- $p = 1$ ... <u>lineární konvergence</u> (bisekce)
- $p > 1$ ... <u>superlineární</u>
- $p = 2$ ... <u>kvadratická</u> - Newton.

<u>Pozn</u>: Blízko kořene x_*: $|e_{n+1}| \sim C|e_n|^p \Rightarrow$ pokud $|e_n| \sim 10^{-l} \Rightarrow$
$\Rightarrow |e_{n+1}| \sim 10^{-pl}$. Tj. v další iteraci mám $p\times$ víc platných cifer výsledku

<u>Pozn</u>: Bisekce: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|I_{n+1}|}{|I_n|} = \frac{1}{2}$ $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$

<u>Věta</u> (Lokální kvadratická konvergence Newtona): $f \in C^2[a,b]$, $f'(x_*) \neq 0$, $\exists x_* \in (a,b)$.
Nechť x_0 je dostatečně blízko x_*, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ z Newtonovy metody. <u>Pak $x_n \to x_*$ kvadraticky</u>.

<u>Dk</u>: 1) <u>Nechť $x_k \to x_*$, dok. že kvadraticky</u> ($e_k \to 0$)

$$0 = f(x_*) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k)(x_* - x_k)}_{\text{nalevo, } /f'(x_k)} + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x_* - x_k)^2, \quad \xi_k \text{ mezi } x_k \text{ a } x_*.$$

$$\underbrace{\underbrace{-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x_k}_{x_{k+1}} - x_*}_{e_{k+1}} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(\underbrace{x_k - x_*}_{e_k})^2 \Rightarrow \boxed{e_{k+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} e_k^2}$$ - chybová rovnice.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}\right| = \frac{1}{2}\frac{f''(x_*)}{f'(x_*)} = C > 0.$$

2) $x_k \to x_*$: $e_{k+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} e_k^2 \le \dots$

- $|f''|$ om na $[a,b]$
- $f'(x_*) \neq 0$, f' je spoj. $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{O}(x_*)$ okolí : $|f'|>0$ na U.

$\Rightarrow \exists M<\infty$: $\left|\frac{f''(x)}{f'(y)}\right| \le M \quad \forall x,y \in U$.

- $|e_{k+1}| \le \frac{1}{2} \underbrace{M|e_k|}_{\le 1} |e_k| \le \frac{1}{2}|e_k|$

  $|x_0-x_*| \le \frac{1}{M} \to k=0$

- Zvol $x_0 \in U$: $|x_0-x_*| = |e_0| \le \frac{1}{M}$ ... definuje okolí V.

Pak $|x_1-x_*| = |e_1| \le \frac{1}{2} \underbrace{\left|\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}\right|}_{\le M} \underbrace{|e_0|}_{\le \frac{1}{M}}|e_0| \le \frac{1}{2}|e_0| \Rightarrow x_1 \in V$.

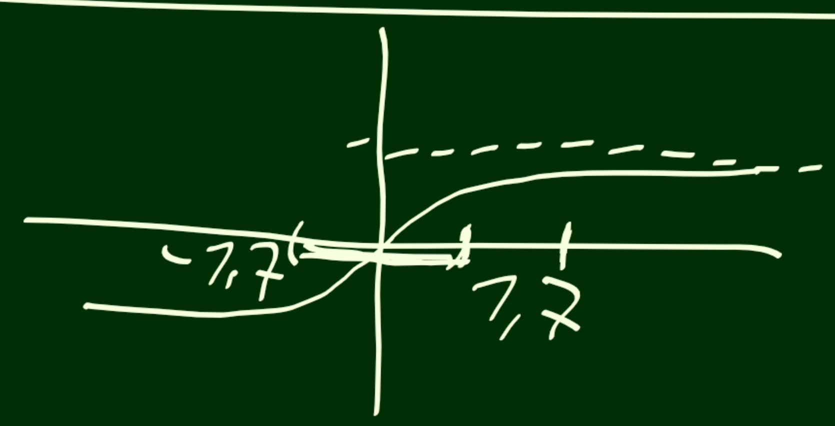
dále $x_1 \in V \Rightarrow |e_2| \le \frac{1}{2} M \underbrace{|e_1|}_{\le \frac{1}{M}}|e_1| \le \frac{1}{2}|e_1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^2|e_0|$

obecně indukcí $x_k \in V$ $\quad |e_{k+1}| \le \frac{1}{2}|e_k| \le \dots \le \left(\frac{1}{2}\right)^k|e_0| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Problémy: - jen lokální konvergence: $\operatorname{arctg} x = 0$

$\exists x_c$: pro $x_0 \in (-x_c, x_c)$: $x_k \to x_*$.

mimo to ne.



- Zacyklení: $x^3-2x+2=0$ (kořen $-1{,}77\ldots$), $x_0 = 0$ Newton dá 0,1,0,1,0,1,...

  $\exists$ okolí bodu 0, bodu 1, x_0 z okolí $\Rightarrow x_k \to 0$, sudé; $\to 1$, liché.

- Věta (Li-Yorke): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynom s aspoň 3 různými kořeny v $\mathbb{R}$.

  Pak $\forall p \in \mathbb{N} \quad \exists x_0$: $\{x_k\}$ z Newtona má periodu p.

- Chaos